Die Fibonacci-Folge und der Goldene Schnitt

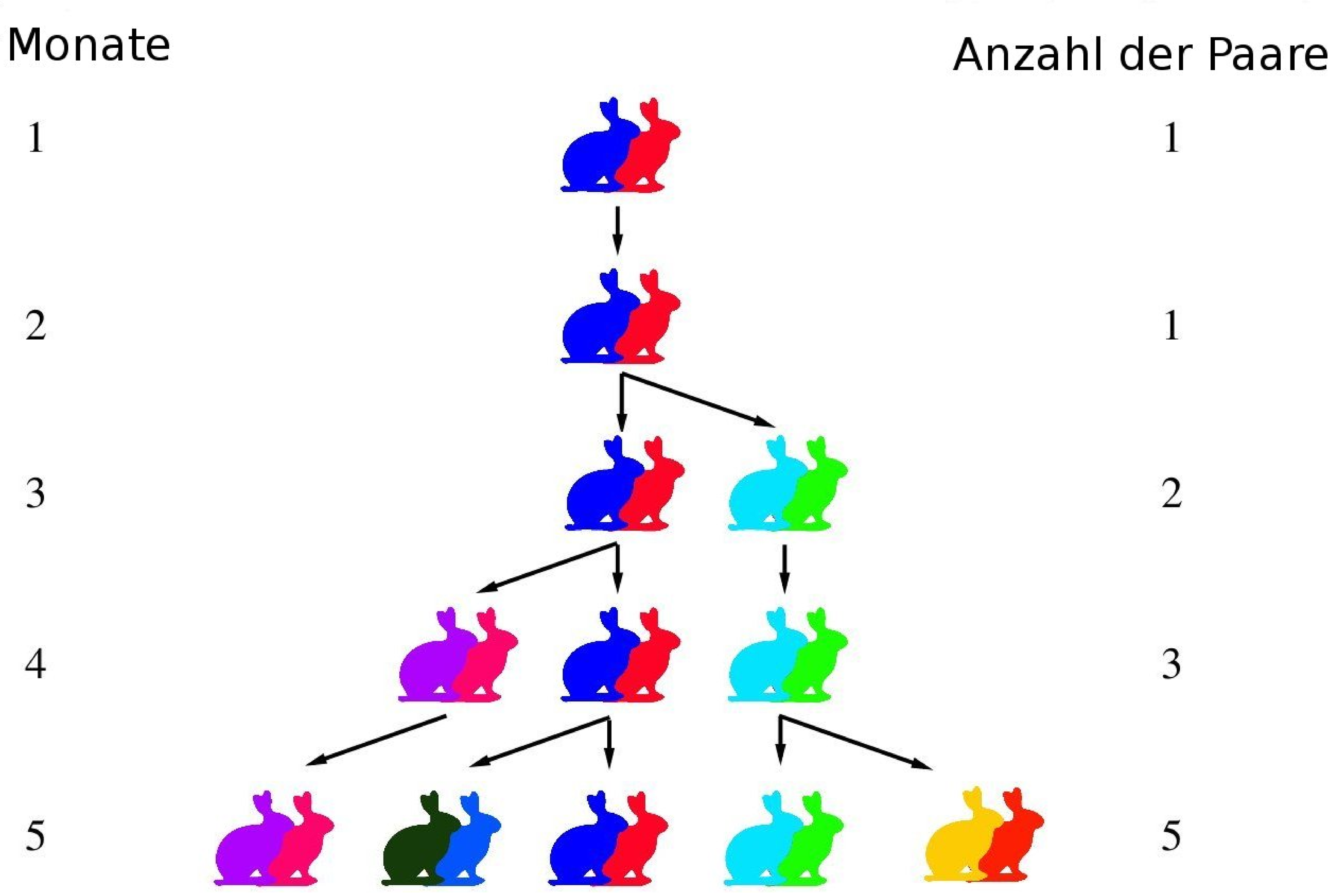
UNIVERSITAS FRIBURGENSIS

1. Die Kaninchen von Fibonacci

Im Jahre 1202 interessierte sich Fibonacci für das Wachstumsproblem einer Bevölkerung von Kaninchen unter idealen Umständen. Das Problem kann wie folgt formuliert werden:

- man fängt mit einem Paar junger Kaninchen an,
- ein einmonatiges Kaninchen ist fähig sich fortzupflanzen,
- ein Kaninchenpaar (im Fortpflanzungsalter) gebärt jeden Monat ein weiteres Kaninchenpaar.

Fibonacci stellte sich folgende Frage: wieviele Kaninchenpaare wird es nach einem Jahr geben? Die untenstehende Figur veranschaulicht die monatliche Entwicklung der Anzahl dieser Kaninchenpaare.



Ideale Entwicklung einer Bevölkerung von Kaninchen.

Man bemerkt, dass die Anzahlen von Kaninchenpaaren nach jedem Monat die folgende Zahlenfolge bilden

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...

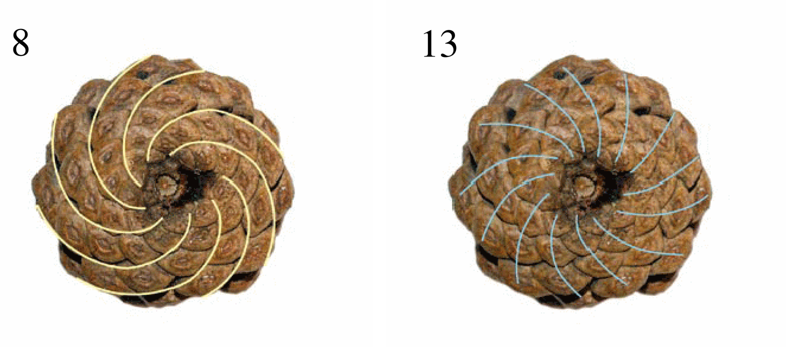
Diese Zahlenfolge wird **Fibonacci-Folge** genannt und kann folgenderweise gebildet werden:

1 1
+
1 1 2
+
1 1 2 3
+
1 1 2 3 5

Die Konstruktion der Fibonacci-Folge

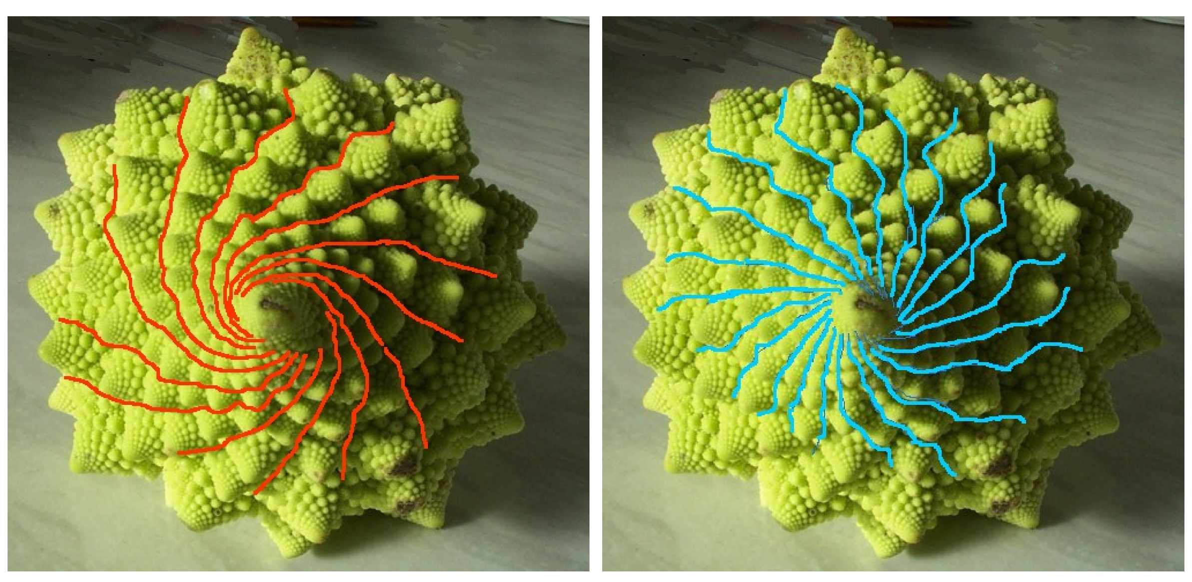
Man kann diese Zahlfolge erstaunlicherweise häufig in der Natur wiederfinden.

Beispielsweise sind Tannenzapfen aus 8 Spiralen im Uhrzeigersinn und aus 13 Spiralen entgegen dem Uhrzeigersinn zusammengesetzt, zwei aufeinanderfolgenden Zahlen der Fibonacci-Folge:



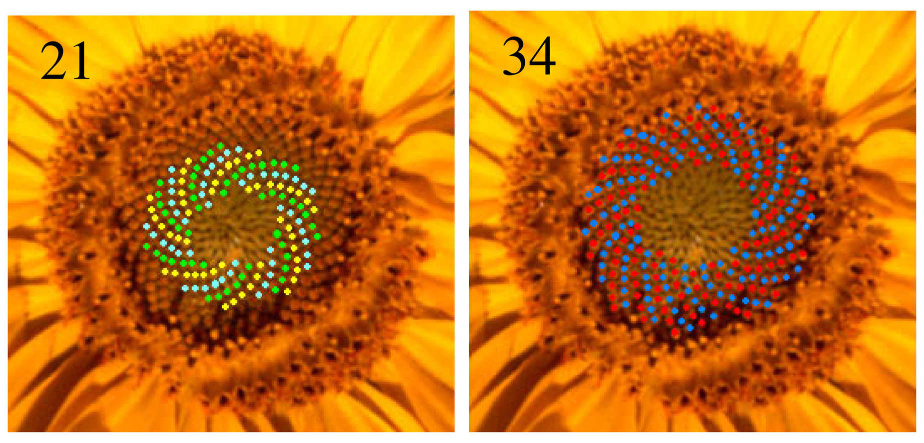
Tannenzapfen und Fibonacci-Folge

Der Romanesco besitzt 13 Spiralen im Uhrzeigersinn und 21 Spiralen entgegen dem Uhrzeigersinn, jeweils zwei aufeinanderfolgenden Zahlen der Fibonacci-Folge.



Der Romanesco und die Fibonacci-Folge

Die Blüte einer Sonnenblume besteht aus zahlreichen kleinen Blüten, den sogenannten Blütenständen, welche spiralenförmig angeordnet sind: 21 Spiralen im Uhrzeigersinn und 34 Spiralen entgegen dem Uhrzeigersinn.

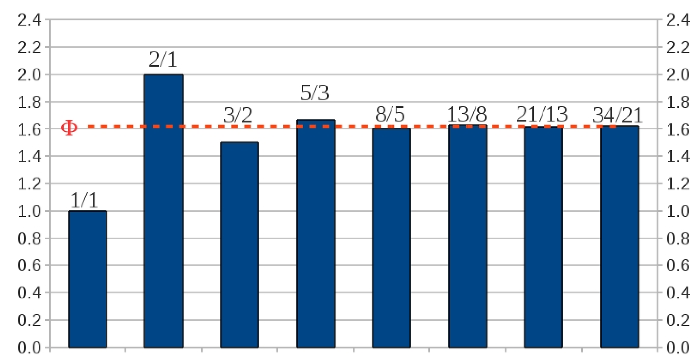


Das Herz einer Sonnenblume

2. Der Goldene Schnitt

Wenn man die Fibonacci-Folge beobachtet, kann man bemerken, dass, die Verhältnisse jeweils aufeinanderfolgender Zahlen eine Zahlenfolge bilden, welche sich allmählich einer Zahl Φ nähert, dem sogenannten Goldenen Schnitt, dessen Wert beträgt:

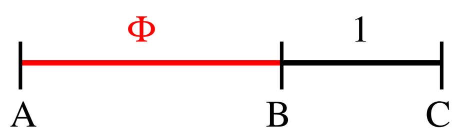
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$



Das Verhältnis zwischen aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen

Φ ist die einzige positive Zahl, die folgende geometrische Eigenschaft besitzt:

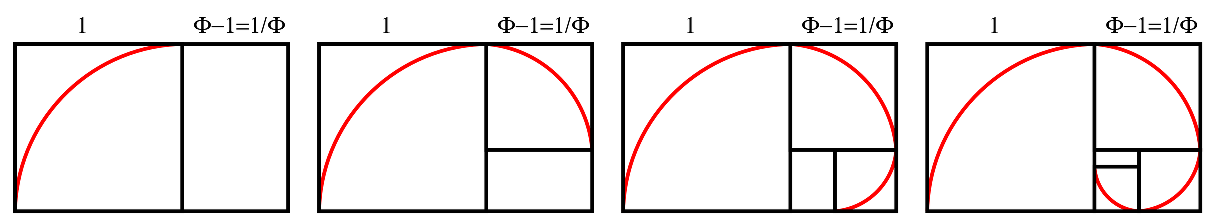
$$\frac{1+\Phi}{\Phi} = \frac{\Phi}{1} \quad \text{das heisst} \quad \frac{\text{Länge von AC}}{\text{Länge von AB}} = \frac{\text{Länge von AB}}{\text{Länge von BC}}$$



Goldener Schnitt

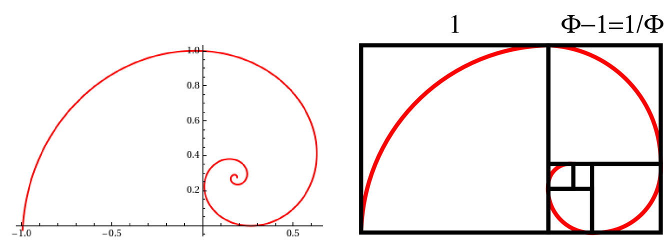
3. Die Goldene Spirale

Mit Hilfe des Goldenen Schnittes kann man eine " Spirale " folgenderweise entwerfen: man zeichnet ein Rechteck von Seite 1 und Φ und einen Kreisbogen im Quadrat von Seite 1. Ausgehend vom Rechteck von Seiten $1/\Phi = \Phi - 1$ und 1 zeichnet man ein Quadrat von Seite $1/\Phi$ und einen Kreisbogen in dessen Innern und so weiter...



Annäherung einer Spirale mit Hilfe des Goldenen Schnittes Φ

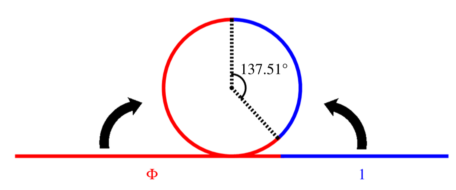
Man erhält keine genaue Spirale, sondern eher eine Folge von Kreisbögen, welche eine gute Annäherung einer Spirale ergibt. Diese wird Goldene Spirale genannt.



Die Goldene Spirale und ihre Annäherung

4. Der Goldene Winkel

Der Goldene Winkel beträgt ungefähr 137.5° und wird erzeugt, indem man den Goldenen Schnitt des Kreisumfanges nimmt:



Die Goldwinkel

Die Goldene Winkel triit häufig in der Natur auf, zum Beispiel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Blättern einer Pflanze.

Literatur

[1] Die Webseite des Kollegiums Smith: http://www.math.smith.edu/phyllo//